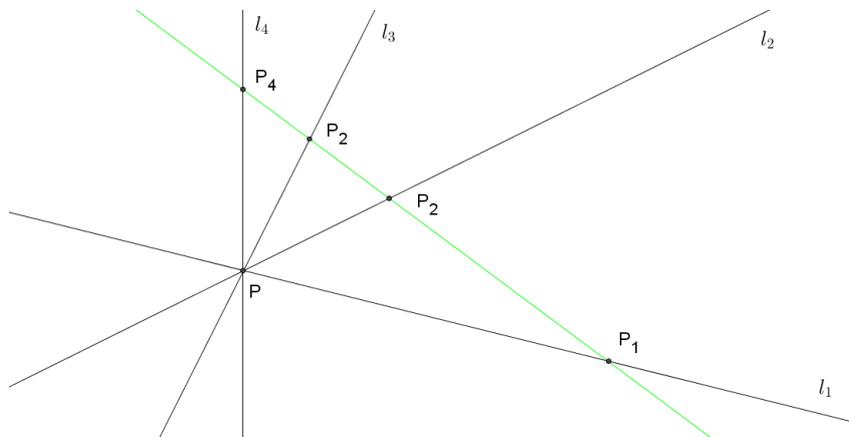


- Wir wiederholen zunächst den Begriff „Doppelverhältnis“. Dabei handelt es sich um eine Invariante von vier Punkten auf \mathbb{P}^1 beziehungsweise eine Invariante von vier Geraden in \mathbb{P}^2 durch einen gegebenen Punkt. Die beiden Möglichkeiten, den Begriff zu verstehen sind jedoch gleichwertig, da die Punkte in \mathbb{P}^1 den Richtungen der Geraden in \mathbb{P}^2 entsprechen. Dies wird durch das folgende Bild anschaulich:



Für $a, b, c, d \in \mathbb{P}^1$ ist das Doppelverhältnis definiert als

$$(a, b; c, d) := \frac{c - a}{b - c} : \frac{d - a}{b - c} \in \mathbb{C}^*.$$

Setzt man $a = \infty, b = 0, c = 1$ und $d = \lambda$, so erhält man $(\infty, 0; 1, \lambda) = \lambda$.

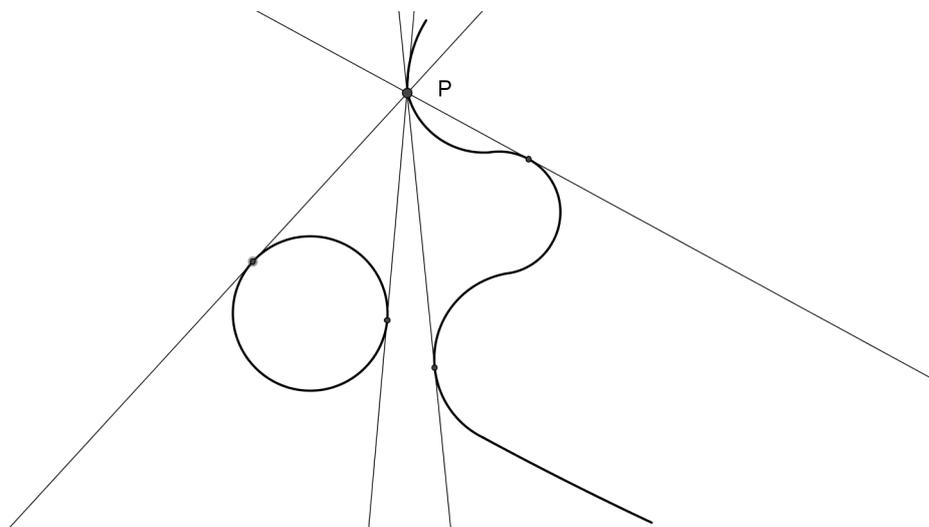
- Die j-Invariante von $a, b, c, d \in \mathbb{P}^1$ ist definiert als

$$j(a, b, c, d) = j((a, b; c, d)) = j(\lambda) := 256 \cdot \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(1 - \lambda)^2}.$$

Sie ist unabhängig von der Reihenfolge der eingesetzten Punkte.

- Wir beschäftigen uns nun mit der j-Invariante einer kubischen Kurve: Sei $P \in \mathcal{C}$. Es gibt vier Geraden l_1, l_2, l_3, l_4 durch P , die Tangenten an \mathcal{C} sind. Für die j-Invariante von \mathcal{C} gilt

$$j(\mathcal{C}, P) = j(l_1, l_2, l_3, l_4).$$



Die j-Invariante $j(\mathcal{C}, P)$ ist unabhängig von P .

- Für die spezielle Wahl von P als Wendepunkt von \mathcal{C} schreiben wir die kubische Kurve \mathcal{C} zunächst in Normalform als „Divergente Parabel“ nach Newton. Dadurch erhält man die affine Gleichung

$$\mathcal{C} : y^2 = (x - a)(x - b)(x - c).$$

Für die j -Invariante gilt dann

$$j(\mathcal{C}) = j(a, b, c, \infty).$$

Die folgenden beiden Bilder zeigen die kubische Kurve sowohl in affiner als auch in projektiver Darstellungsweise.

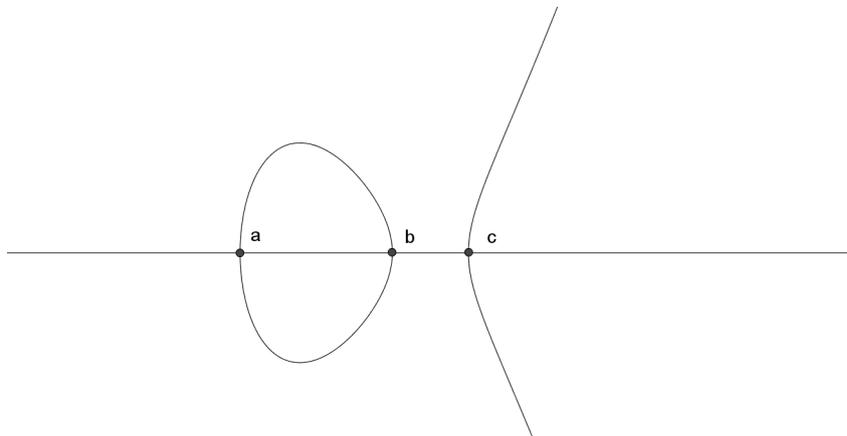


Abbildung 4.1: affine Darstellung

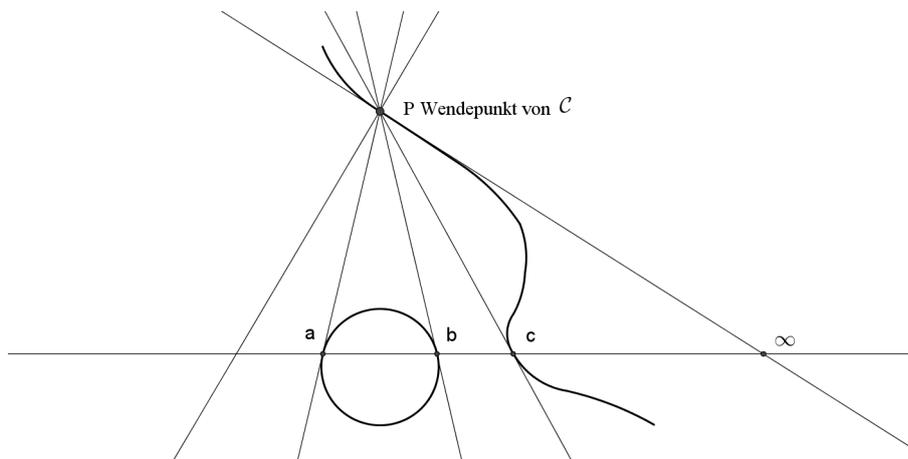


Abbildung 4.2: projektive Darstellung

Durch eine gebrochene lineare Transformation können die Punkte a, b, c, ∞ abgebildet werden auf $\infty, 0, 1, \lambda$ und man erhält

$$\mathcal{C}_\lambda : y^2 = x(x - 1)(x - \lambda)$$

als Parametrisierung.

Satz. Zwei glatte kubische Kurven \mathcal{C} und \mathcal{C}' lassen sich genau dann durch eine projektive Transformation aus $PGL_3(\mathbb{C})$ ineinander überführen, wenn $j(\mathcal{C}) = j(\mathcal{C}')$.

Beispiel. Die beiden kubischen Kurven

$$\mathcal{C} : y^2 = x(x - 1)(x - 2) \quad \text{und} \quad \mathcal{C}' : y^2 = x(x - 1)(x - 3)$$

können nicht ineinander überführt werden.

Man kann festhalten, dass zwei kubische Kurven

$$\mathcal{C} : y^2 = x(x - 1)(x - \lambda) \quad \text{und} \quad \mathcal{C}' : y^2 = x(x - 1)(x - \lambda')$$

genau dann ineinander überführt werden können, wenn $j(\lambda) = j(\lambda')$.

4.18 $PGL_3(\mathbb{C})$ Wirkung auf Kurven vom Grad d

Sei $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]_d =: V_d$ ein homogenes Polynom vom Grad d . Die Gruppe $PGL_3(\mathbb{C})$ operiert auf V_d .

Sei $A \in PGL_3(\mathbb{C})$ gegeben durch $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$F(\alpha x + \beta y + \gamma z, \delta x + \varepsilon y + \zeta z, \lambda x + \mu y + \nu z) \in V_d$$

Für das Polynom $F = F_1^{n_1} \dots F_r^{n_r}$ mit den irreduziblen Komponenten F_i definieren wir

$$(F) := n_1 \mathcal{C}_1 + \dots + n_r \mathcal{C}_r \in Div(\mathbb{P}^2),$$

wobei $\mathcal{C}_i = \mathcal{V}(F_i)$ ist und $Div(\mathbb{P}^2) := \{\sum_{i=1}^r n_i \mathcal{C}_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, \mathcal{C}_i \text{ irreduzibel}\}$ die Divisorengruppe von \mathbb{P}^2 bezeichnet.

Es gilt: $(P) = (G)$ genau dann, wenn $F = \lambda G$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Es besteht eine 1:1-Beziehung zwischen $\mathbb{P}(V_d)$ und den Divisoren von \mathbb{P}^2 vom Grad d . Dabei ist

$$\text{Grad} \left(\sum_{i=1}^r n_i \mathcal{C}_i \right) := \sum_{i=1}^r n_i \cdot \text{Grad}(\mathcal{C}_i).$$

Wir wollen nun $\mathbb{P}(V_d)$ für $d \in \{1, 2, 3\}$ genauer untersuchen.

d=1: Für $d = 1$ ist

$$V_1 = \{uX + vY + wZ \mid u, v, w \in \mathbb{C}\} \simeq \{(u, v, w) \in \mathbb{C}^3\}.$$

$\mathbb{P}(V_1)$ ist isomorph zu \mathbb{P}^2 . Mit $(\mathbb{P}^2)^*$ wird der Dualraum von \mathbb{P}^2 bezeichnet. Die Punkte $(u : v : w)$ von $(\mathbb{P}^2)^*$ stehen in 1:1-Beziehung zu den Geraden $\{uX + vY + wZ = 0\}$ in \mathbb{P}^2 . Die Gruppe $PGL_3(\mathbb{C})$ hat eine Bahn auf $\mathbb{P}(V_1)$.

d=2: Für $d = 2$ ist

$$V_2 = \{aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eXZ + fYZ\}$$

$\mathbb{P}(V_2)$ ist isomorph zu \mathbb{P}^5 . Die Gruppe $PGL_3(\mathbb{C})$ hat drei Bahnen auf $\mathbb{P}(V_2)$. Wir betrachten nun die Bahnenstruktur genauer und geben für die unterschiedlichen Fälle von $F \in V_2$ jeweils die Dimension der Bahn an.

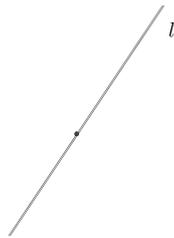


Abbildung 4.3: doppelzählende Gerade, $F \sim l^2 \rightarrow$ Bahn der Dimension 2

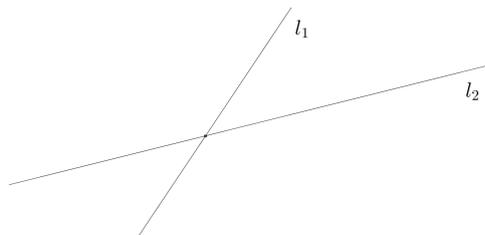


Abbildung 4.4: $F \sim l_1 \cdot l_2, l_1 \neq l_2 \rightarrow$ Bahn der Dimension 4

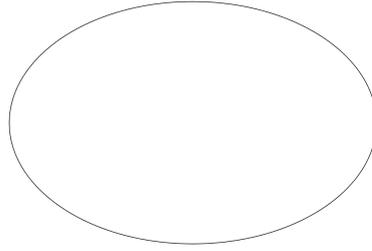


Abbildung 4.5: allgemeine Quadrik, $F \sim x^2 + y^2 + z^2$, F irreduzibel \rightarrow Bahn der Dimension 5

d=3: Für $d = 3$ ist V_3 abhängig von 10 Koeffizienten. $\mathbb{P}(V_3)$ ist also isomorph zu \mathbb{P}^9 . Auch hier untersuchen wir die Bahnenstruktur genauer und geben für alle $F \in V_3$ die Dimension der Bahn an.



Abbildung 4.6: $F \sim L^3$, $L \in V_1 \rightarrow$ Bahn der Dimension 2

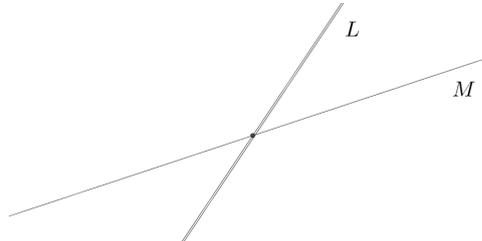


Abbildung 4.7: $F \sim L^2 \cdot M$, $L, M \in V_1$, $L \neq M \rightarrow$ Bahn der Dimension 4

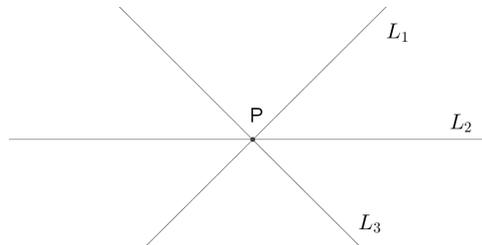


Abbildung 4.8: $F \sim L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$, $L_i \neq L_j$ für $i \neq j$, $L_i \in V_1$, $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{P\} \rightarrow$ Bahn der Dimension 5

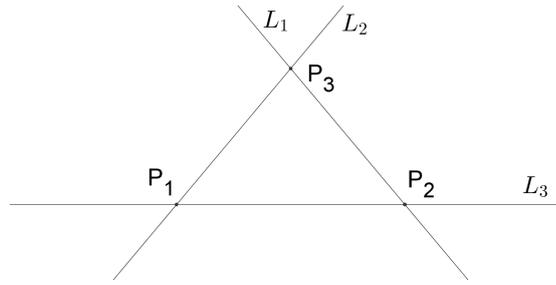


Abbildung 4.9: $F \sim L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$, $L_i \neq L_j$ für $i \neq j$, $L_i \in V_1$, $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{P_1, P_2, P_3\} \rightarrow$ Bahn der Dimension 6

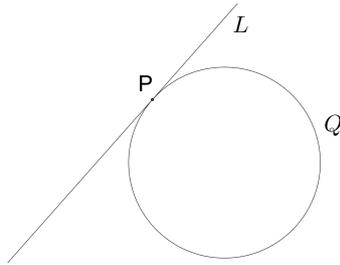


Abbildung 4.10: $F \sim L \cdot Q$, $L \in V_1, Q \in V_2$, $L \cap Q = \{P\} \rightarrow$ Bahn der Dimension 6

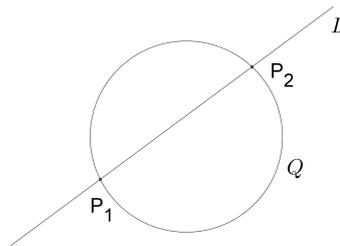


Abbildung 4.11: $F \sim L \cdot Q$, $L \in V_1, Q \in V_2$, $L \cap Q = \{P_1, P_2\} \rightarrow$ Bahn der Dimension 7



Abbildung 4.12: $F \sim Y^2 - (X - a)^3 \rightarrow$ Bahn der Dimension 7

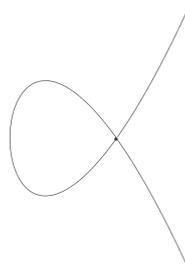


Abbildung 4.13: $F \sim Y^2 - (X - a)^2(X - b)$ mit $a \neq b \rightarrow$ Bahn der Dimension 8

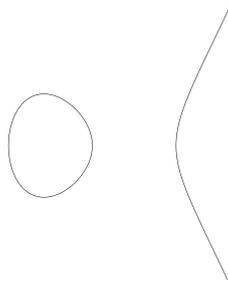
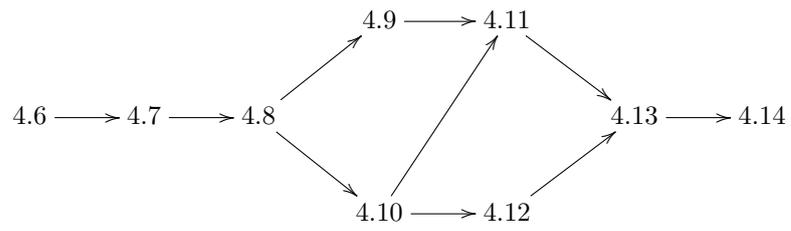


Abbildung 4.14: $F \sim Y^2 - (X - a)(X - b)(X - c)$ mit $a \neq b \neq c \rightarrow$ Bahn der Dimension 8

Die neun obigen Kurven aus den Abbildungen 4.6 bis 4.14 lassen sich durch Verallgemeinerung folgendermaßen ineinander überführen:



Kapitel 5

Birationale Geometrie von \mathbb{P}^2

Das Ziel in diesem Kapitel wird sein, interessante Abbildungen zwischen Kurven zu finden und zu studieren.

Definition. • Eine *rationale Abbildung* $\varphi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ ist eine Abbildung der Form

$$\varphi(x : y : z) = (f(x, y, z) : g(x, y, z) : h(x, y, z)),$$

wobei $f, g, h \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ homogene Polynome vom gleichen Grad sind.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit haben f, g und h keinen gemeinsamen Faktor.

φ ist außerhalb der Menge

$$\Sigma_\varphi := \{(x, y, z) \in \mathbb{P}^2 \mid f(x, y, z) = g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0\} =: \mathcal{V}(f, g, h)$$

definiert. (Dass φ nicht überall auf \mathbb{P}^2 definiert ist, wird durch den gepunkteten Pfeil symbolisiert.)

φ kann also geschrieben werden als Abbildung

$$\varphi: \mathbb{P}^2 \setminus \Sigma_\varphi \rightarrow \mathbb{P}^2.$$

- Σ_φ heißt *Basisort* von φ .

- Die Kurven

$$\lambda f + \mu g + \nu h = 0, \quad (\lambda : \mu : \nu) \in \mathbb{P}^2$$

heißen *Systemkurven* der rationalen Abbildung φ .

Bemerkung. Alle Systemkurven gehen durch Σ_φ .

Beispiele:

1 Inversionsabbildung:

Wir betrachten die Abbildung zunächst bezüglich affiner Koordinaten:

$$\begin{aligned} x &\mapsto \frac{x}{x^2 + y^2} \\ y &\mapsto \frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Nun geben wir die projektive Form der Abbildung an und bezeichnen diese mit ι :

$$\iota: (x : y : z) \mapsto \left(\frac{xz}{x^2 + y^2} : \frac{yz}{x^2 + y^2} : 1 \right) = (xz : yz : x^2 + y^2)$$

- Um den Basisort von ι zu bestimmen, stellen wir das folgende lineare Gleichungssystem auf:

$$\begin{aligned} xz &= 0 \\ yz &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat den Ursprung $(0 : 0 : 1)$ und die zwei Kreispunkte $(1 : i : 0)$ und $(1 : -i : 0)$ als Lösungen. Deshalb gilt für den Basisort von ι :

$$\Sigma_\iota = \{(0 : 0 : 1), (1 : i : 0), (1 : -i : 0)\}$$

- Die Systemkurven von ι sind alle Kurven der Form

$$\lambda xz + \mu yz + \nu(x^2 + y^2) \text{ mit } (\lambda : \mu : \nu) \in \mathbb{P}^2.$$

Man sieht also, dass alle Quadriken durch die drei Punkte aus Σ_ι Systemkurven von ι sind.

2 Standard-Cremona-Transformation:

Wir betrachten wieder zuerst die affine Abbildung:

$$\begin{aligned} x &\mapsto \frac{1}{x} \\ y &\mapsto \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Für die homogene Darstellung dieser Abbildung gilt:

$$\begin{aligned} x &\mapsto \frac{z}{x} \\ y &\mapsto \frac{z}{y} \\ z &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Wir können deshalb eine rationale Abbildung c definieren durch

$$\begin{aligned} c: \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}^2 \\ (x : y : z) &\mapsto \left(\frac{z}{x} : \frac{z}{y} : 1 \right) = (yz : xz : xy). \end{aligned}$$

- Um den Basisort von c zu bestimmen, muss die Gleichung

$$xy = yz = xz = 0$$

gelöst werden. Dadurch erhält man

$$\Sigma_c = \{(0 : 0 : 1), (0 : 1 : 0), (1 : 0 : 0)\}$$

als Basisort von c .

- Die Systemkurven von c sind alle Kurven vom Grad 2 durch die drei Punkte aus Σ_c .

Bemerkung. Für $x, y, z \neq 0$ entspricht die zweifache Anwendung von c der Identität, denn

$$\begin{aligned} c(c(x : y : z)) &= c(yz : zx : xy) \\ &= (zx^2y : xy^2z : xyz^2) \\ &= (x : y : z). \end{aligned}$$

Wir betrachten die Standard-Cremona-Transformation jetzt auf grafische Art und Weise. Dabei sieht man, dass die drei Achsen $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ durch c jeweils auf einen einzelnen Punkt abgebildet werden.

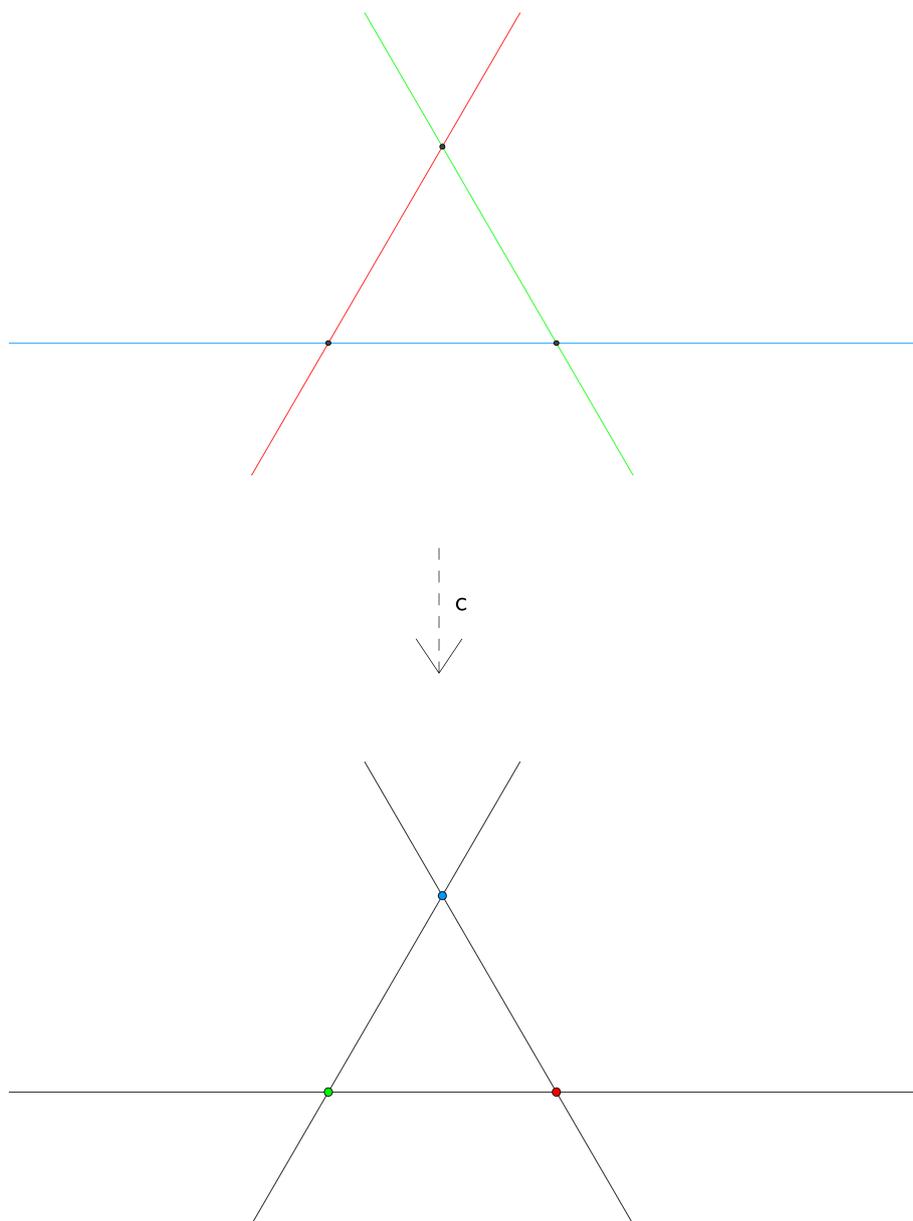


Abbildung 5.1: Standard-Cremona-Transformation; rot: $x = 0$, blau: $y = 0$, grün: $z = 0$